4. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* // J. London Math. Soc. – 1990. – V. 42. – P. 237–248.

5. Граф С. Ю. *Точная оценка якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* // Труды Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2007. – Вып. 14. – С. 31–38.

6. Graf S. Yu. *On the Schwarzian norm of harmonic mappings* // Проблемы анализа – Issues of Analysis. – 2016. – Т. 5(23). – № 2. – P. 20–32.

LOGARITHMIC COEFFICIENTS AND NORM
FOR SCHWARZIAN DERIVATIVE OF HARMONIC FUNCTIONS

S.Yu. Graf

Estimations of logarithmic coefficients and Schwarzian derivative in linear- and affine-invariant families of sense preserving harmonic mappings of the unit disk are obtained. As a converse, estimations of the order of family are proved in terms of supremum of Schwarzian norm over the family. Relations of this results with univalence of harmonic functions will be discussed.

Keywords: harmonic mappings, Schwarzian derivative, linear-invariant families.

УДК 517.54

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ ВЫПУКЛОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.Ю. Граф[1], Я.И. Самойлова[2]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

2 *yana-zavorygina@yandex.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Определяется гиперболический порядок выпуклости локально-однолистных функций. Доказываются теоремы регулярности убывания и роста гиперболического порядка выпуклости в классах однолистных конформных отображений единичного круга.

Ключевые слова: конформные отображения, порядок выпуклости, теоремы регулярности.

В геометрической теории функций комплексного переменного традиционно большое внимание уделяется выпуклым однолистным аналитическим функциям и многочисленным обобщениям понятия выпуклости (см., напр., [1, 2]).

Пусть f – локально однолистная аналитическая функция в единичном круге $\mathbb{D} \subset C$.

Порядком выпуклости функции f в круге $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $0 < r < 1$, называется число [1]

$$\beta(f,r) = \min_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{d}{d\theta} \mathrm{arg} \frac{df(re^{i\theta})}{d\theta} = \min_{|z|=r} \mathrm{Re} \left\{ z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right\}.$$

Пусть $d_h(z_0, z)$ – гиперболическое расстояние между точками z_0, $z \in \mathbb{D}$ в круге $\mathbb{D}$, $\gamma_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) = \rho\}$ – окружность в $\mathbb{D}$ с гиперболическим центром z_0 и гиперболическим радиусом $\rho > 0$.

Гиперболическим порядком выпуклости функции f в круге $D_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) \le \rho\}$ назовем число

$$\beta_h(f,z_0,\rho) = \min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)} \frac{d}{d\theta} \arg T_f(z),$$

где θ – аргумент гиперболического радиуса, соединяющего точку $z \in \gamma_h(z_0,\rho)$ с центром z_0, а $T_f(z) = \frac{d}{d\theta} f(z)$ – касательный вектор к образу окружности $\gamma_h(z_0,\rho)$ при отображении f в точке $f(z)$.

Теорема 1 [3]. *Для локально однолистной аналитической в $\mathbb{D}$ функции f и $z_0 \in \mathbb{D}$, $\rho > 0$, справедливы соотношения*

$$\beta_h(f,z_0,\rho) = \beta_h(\tilde{f},0,\rho) = \beta\left(\tilde{f}, \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1}\right) =$$
$$= \min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)} \mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_0}{1-|z_0|^2}\left((1-\overline{z_0}z)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z_0}\right) + 1\right\},$$

где $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$.

Символом $\mathscr{S}$ обозначим семейство однолистных аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, таких, что $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. В [4] доказана регулярность роста и убывания порядка выпуклости $\beta(f,r)$ в подклассе $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ выпуклых отображений. В ходе сообщения будут представлены теоремы регулярности для $\beta_h(f,z_0,\rho)$ в $\mathscr{C}$ и $\mathscr{S}$.

Теорема 2 [3]. *Пусть $f \in \mathscr{C}$, $z_0 \in \mathbb{D}$, $\rho > 0$, $R(\rho) = \frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}$ и $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$. Тогда*
1) $\beta_h(f,z_0,\rho) \ge e^{-\rho}$;
2) $\beta_h(f,z_0,\rho)\, e^\rho$ *и* $\mathrm{Re}\left\{e^{it}R(\rho)\frac{\tilde{f}''(e^{it}R(\rho))}{\tilde{f}'(e^{it}R(\rho))} + 1\right\} e^\rho$ *не убывают по ρ на $(0,+\infty)$ для любого $t \in [0,2\pi)$;*
3) существуют постоянные $\delta \in [1,+\infty]$ и $t_0 \in \mathbb{R}$, такие что

$$\lim_{\rho\to+\infty} \mathrm{Re}\left\{e^{it_0}R(\rho)\frac{\tilde{f}''\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}{\tilde{f}'\left(e^{it_0}R(\rho)\right)} + 1\right\} e^\rho = \lim_{\rho\to+\infty} \beta_h(f,z_0,\rho)\, e^\rho = \delta;$$

4) константа $\delta = 1$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = z\left(1 + \frac{e^{-it_0} - \overline{z_0}}{1 - e^{-it_0}z_0} z\right)^{-1}.$$

В классе $\mathscr{S}$ теорема регулярности имеет место только для убывания $\beta_h(f,z_0,\rho)$ и только для гиперболических радиусов $\rho < \ln\sqrt{3}$.

Теорема 3 [3]. *Пусть $f \in \mathscr{S}$, $z_0 \in \mathbb{D}$, $0 < \rho < \ln\sqrt{3}$, $R(\rho) = \frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}$ и $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$. Тогда*
1) $\beta_h(f,z_0,\rho) \ge \frac{3-e^{2\rho}}{e^\rho+1}$;
2) $\beta_h(f,z_0,\rho)\,\frac{e^\rho+1}{3-e^{2\rho}}$ *и* $\mathrm{Re}\left\{e^{it}R(\rho)\frac{\tilde{f}''(e^{it}R(\rho))}{\tilde{f}'(e^{it}R(\rho))} + 1\right\}\frac{e^\rho+1}{3-e^{2\rho}}$ *не убывают по ρ на $(0,\ln\sqrt{3})$ для любого $t \in [0,2\pi)$;*

3) существуют постоянные $\delta \in [1,+\infty]$ *и* $t_0 \in \mathbb{R}$*, такие что*

$$\lim_{\rho\to\ln\sqrt{3}} \mathrm{Re}\left\{ e^{it_0}R(\rho)\frac{\tilde{f}''\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}{\tilde{f}'\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}+1\right\}\frac{e^{\rho}+1}{3-e^{2\rho}} =$$

$$= \lim_{\rho\to\ln\sqrt{3}} \beta_h(f,z_0,\rho)\,\frac{e^{\rho}+1}{3-e^{2\rho}} = \delta;$$

4) константа $\delta = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = \left(z+\frac{e^{-2it_0}z_0-\overline{z_0}}{1-e^{-2it_0}z_0^2}z^2\right)\left(1+\frac{e^{-it_0}-\overline{z_0}}{1-e^{-it_0}z_0}z\right)^{-2}.$$

В сообщении предполагается обсудить также регулярность изменения порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в классах α-выпуклых конформных отображений, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\geq\alpha,\ \alpha\in[-1/2,1).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Robertson M.I.S. *On the theory of univalent functions* // Annals of Mathematics. Second Series. – 1936. – V. 37. – № 2. – P. 374–408.

2. Goodman A.W. *On uniformly convex functions* // Ann. Polon. Math. – 1991. – № 56. – P. 87–92.

3. Граф С.Ю., Самойлова Я.И. *Регулярность убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости конформных отображений* // Применение функц. анализа в теории приближений. – Тверь, 2016. – С. 13–27.

4. Граф С.Ю., Самойлова Я.И. *Регулярность убывания порядка выпуклости конформных отображений* // Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». – 2015. – № 2. – С. 135–144.

ON HYPERBOLIC ORDER OF CONVEXITY OF CONFORMAL MAPPINGS

S.Yu. Graf, Ya.I. Samojlova

The hyperbolic order of convexity of locally univalent planar functions is defined. The regularity theorems for decreasing and increasing of hyperbolic order of convexity are proved in the class of univalent conformal mappings of the unit disk.

Keywords: conformal mappings, order of convexity, regularity theorems.